126 – Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

Motivations :

- Les matrices diagonales sont plus pratiques pour faire des calculs, et on aime bien mettre les choses sous forme canonique. Là en plus d'un coup d'œil on lit les valeurs propres.
- Les endomph diago sont denses dans L(E) d'une part, donc si on montre qqch pour eux, on peut étendre par densité.
- Dunford nous dit qu'il suffit d'étudier les endomph diago+nilpotents.

E un K-ev de DF n, K=R ou C. u un endomorphisme de E.
Prérequis : espace stable, valeur propre, vecteur propre, sous espace propre, lien entre matrices et endomorphismes, les espaces propres sont en somme directe.
Attention : on ne définira les choses que pour les endomorphismes ou les matrices mais pas les deux.

I) Généralités

1) Outils de base

E un K-ev de DF n, K=R ou C.

Lemme : lemme des noyaux + les projecteurs sur un noyau par rapport aux autres est un polynôme en u [Gou 175 + Gou 194]

Déf : polynôme caractéristique, sous espace caractéristique.

Prop : F sev stable. Alors le polynôme caractéristique de la restriction de u sur F divise le polynôme caractéristique de u. (écrire en matrice par blocs) [Cog 287]

Déf et prop : matrice compagnon, polynôme caractéristique (récurrence) [Gou 177]

Th : Cayley Hamilton [Gou 177] *(on se donne x non nul, on regarde {x,f(x),…,f^p(x)} où p est le petit entier tq la famille soit liée (on écrit la relation de liaison). On complète {x,f(x),…,f^{p-1}(x)} en une base de E, la matrice de f est par blocs avec un nul. On calcule le poly caract, il s'annule)*

Csq : E somme directe des SEC

Csq : les racines du polynôme minimal sont aussi racines du polynôme caract. Ainsi, les polynômes minimaux et caract ont même facteurs irréductibles *(pas si facile à montrer ! Ne pas scinder sur C ! On écrit que P est égal au produit des Q_i^n_i, puis E comme somme des SEC E_i, on dit que mu est le ppcm des mu_i des restrictions f_i sur chaque E_i. Q_i^n_i est alors un polynôme annulateur de f_i donc mu_i divise Q_i^n_i. Or Q_i est irred donc mu_i=Q_i^m_i. Du coup mu est égal au produit des Q_i^m_i, et ce sont bien les mêmes facteurs irred [Internet]*
Sinon on mq mu et P ont mêmes racines complexes. Sur C c'est clair que c'est les mêms facteurs irred. Sur R on prend Q irred qui divise les deux. Si le degré de Q est 1 alors c'est bon. Sinon, P = (X-a)(X-bar(a)), donc a et bar(a) sont vp donc divisent les deux [Mon 91 4^e edition]
Sinon, [Cog 288])

2) Décomposition de Dunford

Nécessite le polynôme caractéristique scindé ! On n'a pas encore défini ce qu'est une matrice diagonale mais ça va nous donner une motivation pour les étudier.

Th : Dunford [Gou 193] *Comme on sait que les projecteurs p_i sont des polynômes en f, on pose d=sum(lambda_i*p_i), et n=f-d.*

Appl : calcul de puissance (formule binôme) et d'exponentielle [Gou 196]
*Pour calculer l'exp, on écrit que d=sum(lambda_i*p_i) et n=sum((f-lambda_i*Id)*p_i)*

*On a alors exp(d)=sum(exp(lambda_i*p_i)) et on calcule aussi exp(n) en fonction des p_i. On finit par Dunford en disant que exp(f)=exp(d)exp(n), exprimé en fonction des p_i, qu'on peut calculer par DES et Bézout.*

II) <u>Diagonalisation</u>

1) <u>Critères de diagonalisabilité</u>

Déf : u diagonalisable s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de u. Dans cette base, la matrice de u est alors diagonale, et E est somme directe des sous espaces propres. Une matrice u est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

CNS : diago ssi il existe un polynôme annulateur simplement scindé ssi le polynôme minimal est simplement scindé ssi le polynôme caract est scindé et la dimension des sous espaces propres est égale à la multiplicité des racines dans le poly caract. [BMP 165] D'où l'importance du corps où on diagonalise. Ex : matrice [0,1,-1,0]

Ex : n vp distinctes

Ex : projecteurs toujours diagonalisables [BMP 165]

Ex : plus généralement, tout élément d'ordre fini de GLn(C) est diago (car X^r-1 l'annule) [Cog 304]

Application : calculer les puissances de matrices. Par exemple, si on a une relation de récurrence U_n=A*U_{n+1}, et U_0=…
Voir http://membres.multimania.fr/ouichoulamya/mp/exos/ExosReduction.pdf p.8

Application : résolution d'équation : A^3 – 2A² – A + 2I = 0

Appl : dans une equa diff Y'=AY, si A est diagonalisable, un sfs de solutions est {t->exp(lt)v}, l valeur propre, v vect propre.

Prop : si u est diago sur E et F un sev stable de E, alors la restriction de u sur F est diago [Cog 304]

Th : expA est diagonalisable ssi A l'est [BMP 215] *(exp(A)=exp(D+N)=exp(D)exp(N)=exp(D)(I+N')=exp(D)+exp(D)N' (on utilise Dunford et le fait que l'exp d'un nilpotent est unipotent). Reste à vérifier que exp(D) est diago, exp(D)N' est nilp, qu'ils commutent. Si A est diago alors exp(A) l'est, c'est clair. Si exp(A) est diago, la partie nilp de sa décomp de Dnford est nulle, donc exp(A)N' est nul, donc N' est nul donc A est diago)*

Appl : si A est dans Mn(C), exp(u)=Id ssi u est diagonalisable et si ses vp sont des multiples de 2i*Pi [BMP 215] *(assez immédiat)*

Appl : exp(A) diagonale ssi A diagonale *(interpolation)*

2) <u>Un peu de trigonalisation</u>

Utile pour la suite

Définition : si la matrice de u est semblable à une matrice triangulaire supérieure

CNS : u trigo ssi il existe un polynôme annulateur scindé ssi le poly min est scindé ssi le poly caract est scindé. [BMP 166] *(récurrence)*

Rq : si K est alg clos, tout endomph est trigonalisable.

3) <u>Diagonalisation simultanée</u>

Th : soit une famille d'endomorphismes diagonalisables qui commutent. Alors il existe une base qui diagonalise tous les éléments de la famille [Gou 171] (c'est aussi vrai pour les trigo mais c'est plus dur. Traiter d'abord le cas où c'est que des homothéties, puis l'autre cas, récurrence)

Appl : une CL ou une composée d'endomorphismes diagonalisables qui commutent entre eux est diagonalisable.

Appl : GLn est isomorphe à GLm ssi n=m [Cog 305] *(mq si G est un sg fini de GLn où tous les elts sont d'ordre 2, alors il a au plus 2^n éléments. Mq il existe un tel groupe. Conclure par RpA)*

4) Propriétés topologiques

Prop : Dn l'ens des matrices diago, Dn' l'ens des matrices à n valeurs propres distinctes. Alors Dn' est ouvert, c'est l'intérieur de Dn, Dn(C) est dense dans Mn(C) et Dn(R) n'est pas dense dans Mn(R). [BMP 178]

Appl : Cayley-H

Prop : A dans Mn(C) est diagonalisable ssi l'orbite de A est fermée *[Caldero] passe par Jordan, ou [Gou 191] qui montre que A est semblable à une matrice triangulaire avec des petits termes hors diagonale*

III) Endomorphismes particuliers

1) Réduction des endomorphismes normaux [Gou 258]

On va réduire On(R), An(R), An(C), Sn(R), Hn(C), Un(C). Sur un espace hermitien on va réussir à diagonaliser, mais pas sur un euclidien.

Def : [Gou 258]
- Endomorphismes autoadjoints <-> u=u*
- Endomorphismes normaux : u commute avec u* (en particulier, les autoadjoints sont normaux).
- On(R), An(R), An(C), Sn(R), Hn(C), Un(C).
- Tous ces endomph sont normaux, seuls Sn(R) et Hn(C) sont autoadjoints.

Lemme : deux lemmes du Gourdon. Prop 2 inutile.

Th : réduction des endomph normaux sur un ev hermitien. C'est en fait une CNS.

Th : réduction des endomph normaux sur un ev euclidien. C'est en fait une CNS. *On ne se sert pas de la réduction sur C pour trouver celle sur R.*

Corollaire : réduction de On(R), An(R), An(C), Sn(R), Hn(C), Un(C) *(tableau en annexe ?)*

Corollaire de la réduction de U(n) et SO(n) : ils sont connexes par arc. [Aud 66]
Pour SO(n) : il suffit de relier toute matrice à l'identité. Le nb de -1 est pair, on les regroupe deux par deux en les écrivant comme une matrice de rotation avec theta=Pi. Donc la matrice a que des blocs de rotations et des 1. On rempalce theta par t theta, et le chemin t->B(t) mène de Id à la matrice.*

Corollaire de la réduction de Sn(R) : (E,q) un espace euclidien, et q' une forme quadratique. Alors il existe une base orthonormée de E (ie orthonormée pour q) dans laquelle la matrice de q' est diagonale réelle (et cette base est donc orthogonale pour q') [Gou 245]

Appl : (E,q) un ev euclidien. Une conique propre à centre s'écrit, dans un repère orthonormé d'origine le centre, … ou … (ellipse ou hyperbole) [Aud 228]

2) Endomph semi simples [Gou 224]

Sorte de généralisation de la notion de diagonalisabilité pour les corps non algébriquement clos.

Attention : on peut définir la semi simplicité de deux façons :
- *U semi simple si tout sev stable admet un suppl stable [BMP], [Gou].*
- *U semi simple s'il est diagonalisable dans une extension [Cog]*

La 2nd déf permet de bien voir ça comme une généralisation de la diago mais les preuves sont longues (Déf 1 => Déf 2 n'est pas trop dur, mais l'inverse l'est).

Déf : u est semi simple ssi tout sev stable par u admet un supplémentaire u-stable

Ex : une rotation du plan est semi simple mais pas diagonalisable dans R.

Th : u semi simple si son polynôme minimal est produit de polynômes unitaires distincts deux à deux *(pour le sens direct, on suppose mu=M²N, on mq MN(f)=0, contradiction. Pour l'autre sens, il faut montrer qu'un sev stable F est somme directe des E_i inter F, et que si mu est irred, alors f est semi simple (pas facile).)*

Csq :
- les matrices diagonalisables sont semi simples.
- les notions de diagonalisabilité et de semi-simplicité coïncident sur C.

Th : M matrice réelle. M est semi simple ssi elle est diago dans C. (*Plus généralement, une matrice de Mn(K) est semi simple si elle est diagonalisable dans une extension L de K, à condition que K soit parfait je crois. Voir [Cog].) Y'a du boulot.*

Déf : matrice presque diagonale

Prop : A est semi simple sur R ssi elle est semblable dans R à une patrice p.d. *Encore du boulot*

Ex : isométries, antisymétries…

Th : Dunford généralisé [BMP 160] *(avantage : on est sur un R-ev, et pas besoin de supposer k algébriquement clos). (Existence : M=D+N dans C. Mq D et N sont réelles (regarder les conjuguées). D est diago dans C donc semi simple).*

<u>Dvpt :</u>
A diago ssi exp(A) diago [BMP 215] (***)
Réduction des endomorphismes normaux [Gou Alg 258] (**)
Endomorphismes semi-simples [Gou Alg 224] (**)

<u>Ce que je n'ai pas mis :</u>
- diagonalisation des matrices de permutation

<u>Commentaires :</u>
- Revoir la classification des coniques.
- Peut-être parler de la suite des noyaux, dire qu'elle stationne à partie de la multiplicité du pol min, pour atteindre le SEC, et que du coup, une matrice A de Mn(C) est diago ssi pout tout l, Ker(A-lId)=Ker(A-lId)²
- Idée : le fait qu'il y ait un nb fini de vp nous permet de montrer que GLn est dense dans Mn

<u>Bibliographie :</u>
[Aud] Audin - Géométrie
[BMP] Objectif agreg
[Cog] Cognet – Algèbre linéaire
[Gou] Gourdon algèbre

<u>Rapport du Jury :</u>
Il faut pouvoir donner des exemples naturels d'endomorphismes diagonalisables et des critères. Le calcul de l'exponentielle d'un endomorphisme diagonalisable est immédiat une fois que l'on connaît les valeurs propres et ceci sans diagonaliser la matrice.